№9 дәріс сабағы

Көп айнымалыға байланысты функцияның дербес туындылары. Толық дифференциал. Жанама жазықтық пен нормаль теңдеулері. Күрделі функцияның туындысы.

Анықтама 1. Анықталу облысы жазықтықтың(кеңістіктің) ішкі жиыны болатын D облысы, ал мәндер облысы нақты осьтің бойындағы E жиыны болатын функция екі(үш) айнымалыға байланысты функция деп аталады.

D - Oxy жазықтығындағы жиын, ал E - Oz осінің жиыны болатын екі айнымалыға байланысты функция $z = f(x, y)$ түрінде жазылады.

Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындыларының анықтамасын беру үшін $y = const$ деп есептеп, x-ке Δx өсімшесін береміз $(x + \Delta x \in D)$. Онда z функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Дәл осылай, z функциясының y бойынша дербес өсімшесін табамыз:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y-тің екеуіне де сәйкесінше $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \tag{1}$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

Анықтама 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left[\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right]$ шектері бар болса, онда ол шектер z функциясынан x айнымалысы [z функциясынан y айнымалысы] бойынша алынған *дербес туындылар* деп аталады

.

Анықтама 5. $z = f(x; y)$ функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \tag{2}$$

мұндағы α_1 және α_2 $\Delta x \to 0$ және $\Delta y \to 0$ шексіз аз шамалар болатын теңдігімен өрнектелсе, онда ол *дифференциалданатын функция* деп аталады, ал бас (сызықтық) бөлігі $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y$ *толық дифференциал* деп аталады және былай белгіленеді

$$(\Delta x = dx\ ,\ \Delta y = dy) : \partial z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

(1) және (2) теңдіктерін салыстырып, $\Delta z \approx dz$ жуықтауын аламыз. Осы жуықтауды (x_0, y_0) нүктесі үшін жазып,

$$f\left(x+\Delta x;\ y+\Delta y\right)\approx f\left(x_0;y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0\,;y_0\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x_0\,;y_0\right)}{\partial y}\Delta y$$

дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану формуласын аламыз.

$z=F(u\,;v)$ функциясы берілсін, мұндағы $u=\varphi(x;\ y)$, $v=\psi(x\,;y)$ және $F\,,\varphi\,,\psi$ функцияларының үзіліссіз дербес туындылары табылсын, онда z функциясынан x және y айнымалылары бойынша алынған дербес туындылар төмендегі формулалармен есептеледі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Егер $z=F(x,y,u)$ функциясы берілсе, мұндағы $y=f(x)$, $u=\psi(x)$, онда толық туынды $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}$ - формуласымен анықталады.